第 39 卷 第 6 期 厦门大学学报(自然科学版) Vol. 39 No. 6
2000 年 11 月 Journal of Xiamen University (Natural Science) Nov. 2000
文章编号: 0438-0479(2000)06-0737-04

关于拟遗传代数的 Kazhdan-Lusztig 理论

吴武顺
(漳州师范学院数学系, 福建 漳州 363000)
林亚南
(厦门大学数学系, 福建 厦门 361005)

摘要: 用同调代数的方法, 研究拟遗传代数与其反代数, 与其标准商代数之间关于 Kazhdan-Lusztig 理论的性质. 证明了: 设拟遗传代数 (A, Λ) 有相应于长度函数 l 的 Kazhdan-Lusztig 理论, 则它的反代数 (A^{op}, Λ) 也有相应于 l 的 Kazhdan-Lusztig 理论, 它的标准商代数 $(A/AeA, \Lambda_i)$ 有相应于诱导函数 l' 的 Kazhdan-Lusztig 理论.

关键词: 拟遗传代数; Kazhdan-Lusztig 理论
中图分类号: O 153.3 **文献标识码**: A

有限群理论中一个尚未解决的问题是决定李型有限群的不可约模表示的特征标和级. 1979 年, Lusztig[1] 在这个问题的解决上迈出了重要的一步, 提出了著名的 Lusztig 猜测. 同时, 在研究 Coxeter 群及 Hecke 代数的表示时, Kazhdan 和 Lusztig[1] 提出了关于复半单李代数的 Verma 模的合成因子重数的一个类似的猜测. 到目前为上, Lusztig 猜测还没有被完全证明. Cline, Parshall 与 Scott 利用有限维代数理论去研究上述问题, 成功地抽象出一般的拟遗代数具 Kazhdan-Lusztig 理论的定义, 并由此给出了在李理论形式下 Lusztig 猜测成立的充分必要条件, 且得到了这个猜测的一个新的结果[2~4]. 本文讨论一个拟遗传代数与其反代数, 其标准商代数关于 Kazhdan-Lusztig 理论的性质.

1 记号与概念

总假定 k 是一个代数闭域, 代数 A 总指基的连通的有限维 k-代数, 并且是结合的带单位元 1. 模总指有限生成右 A-模. 设 $S(i)$, $i \in \Lambda$ 是所有的单 A-模, 这里的指标集 Λ 是一个带有偏序关系 $\leq$ 的偏序集. 一般地, $\Lambda = \{1, 2, \cdots, n\}$, 且偏序 $\leq$ 按自然数的序. 对于每个 $i \in \Lambda$, 记 $P(i)$ 与 $I(i)$ 分别是 $S(i)$ 的投射盖与入射包. 我们用 $\Delta(i)$ 记 $P(i)$ 的使其合成因子具有形式 $S(j)$,

收稿日期: 2000-01-14
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19771070); 教育部优秀青年教师基金资助项目; 福建省优秀留学回国人员基金资助项目
作者简介: 吴武顺(1974-), 男, 硕士.

$j \le i$ 的极大商模. 对偶地, 我们用 $\nabla(i)$ 记 $I(i)$ 的使得其合成因子形如 $S(j)$, $j \le i$ 的极大子模. 最后, 我们记 $\Delta = \{\Delta(i) \mid i \in \Lambda\}$, $\nabla = \{\nabla(i) \mid i \in \Lambda\}$, 并记 $F(\Delta)$ 为 A - 模范畴的满子范畴, 其中每个模具有一个滤链使其滤链因子同构于 Δ 中某个模.

定义 1[5]　代数 A (更确切地说, 二元对 (A, Λ)) 称为拟遗代数, 如果

1) $\mathrm{End}_A(\Delta(i)) \cong k$, 对所有的 $i \in \Lambda$;

2) $P(i) \in F(\Delta)$, 对所有的 $i \in \Lambda$.

对于拟遗传代数 (A, Λ), 称 Λ 为 A 的权集. 对于每个权 $i \in \Lambda$, 称 $\Delta(i)$ 为标准模, $\nabla(i)$ 为余标准模. 拟遗传代数 (A, Λ) 的模范畴与其标准模集 Δ 成为由 Cline, Parshall 及 Scott[6] 定义下的权集为 Λ 的"最高权范畴"(highest weight category); 反之, 任意一个带有限权集的最高权范畴都是某个拟遗传代数的模范畴. 由于标准模与余标准模的对偶性, 一个拟遗传代数的反代数也是拟遗传的.

定义 2[4]　设 (A, Λ) 是一个拟遗传代数, 设 l 是一个由 Λ 到整数集 Z 的映射, 称为长度函数. 代数 (A, Λ) 称为有相对于 l 的 Kazhdan-Lusztig 理论, 如果对于任意的权 $i, j \in \Lambda$, 下面两个性质成立:

1) $\mathrm{Ext}_A^m(\Delta(i), S(j)) \ne 0 \quad \Rightarrow m \equiv l(i) + l(j) \pmod 2$

2) $\mathrm{Ext}_A^m(S(j), \nabla(i)) \ne 0 \quad \Rightarrow m \equiv l(i) + l(j) \pmod 2$

2　结论和证明

定理 1　拟遗传代数 (A, Λ) 有相应于长度函数 l 的 Kazhdan-Lusztig 理论, 当且仅当其反代数 (A^{op}, Λ) 有相应于同一长度函数 l 的 Kazhdan-Lusztig 理论.

证　记 A 的反代数 A^{op} 的单模为 $S^{op}(i)$, $i \in \Lambda$, 标准模为 $\Delta^{op}(i)$, $i \in \Lambda$. (A, Λ) 是拟遗传代数当且仅当其反代数 (A^{op}, Λ) 是拟遗代数. 由于 $\mathrm{Ext}_{A^{op}}^m(\Delta^{op}(i), S^{op}(j)) \cong \mathrm{Ext}_A^m(S(j), \nabla(i))$, $\mathrm{Ext}_{A^{op}}^m(S^{op}(i), \nabla^{op}(j)) \cong \mathrm{Ext}_A^m(\Delta(j), S(i))$, 易知定理成立.

所有单 A - 模的集合的指标集与 A 的本原正交幂等元的集合是一一对应的. 记 $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, 这里 e_i, $i \in \Lambda$ 是本原正交幂等元. 记 $\epsilon_i = e_i + e_{i+1} + \cdots + e_n$, $1 < i < n$, 则 (A, Λ) 的标准商代数 $(A/A\epsilon_i A, \Lambda_i)$ 也是拟遗传代数, 这里 $\Lambda_i = \{j \in \Lambda \mid j < i\}$.

定理 2　设拟遗传代数 (A, Λ) 有一个相应于长度函数 l 的 Kazhdan-Lusztig 理论, 则拟遗传代数 $(A/A\epsilon_i A, \Lambda_i)$ 有一个相对于诱导长度函数 l' 的 Kazhdan-Lusztig 理论, 其中 $l'(j) = l(j)$, $j \in \Lambda_i$.

为证明定理 2, 先证明同调代数的一个命题.

命题 1　设 A 是一个代数, S 是单 A - 模. 设 M 是 A - 模.

1) 设 $O \to P_s \xrightarrow{f_s} \cdots \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to O$ 是 M 的极小投射预解式, 则 $\mathrm{Ext}_A^m(M, S) \ne 0$ 的充分必要条件是 S 为 $\mathrm{top}\, P_m$ 的直和项.

2) 对偶地, 设 $O \to M \xrightarrow{g_0} I_0 \xrightarrow{g_1} I_1 \to \cdots \xrightarrow{g_s} I_s \to O$ 是 M 的极小入射预解式, 则 $\mathrm{Ext}_A^m(S, M) \ne 0$ 的充分必要条件是 S 为 $\mathrm{Socle}\, I_m$ 的直和项.

证　对 $1 \le i \le m$, 令 $\Omega_i = \mathrm{Im}\, f_i$, 由同调代数结论知

$$\mathrm{Ext}_A^m(M, S) \cong \mathrm{Ext}_A^{m-1}(\Omega_1, S) \cong \cdots \cong \mathrm{Ext}_A^1(\Omega_{m-1}, S)$$

若 $\mathrm{Ext}_A^m(M, S) \ne O$, 则 $\mathrm{Ext}_A^1(\Omega_{m-1}, S) \ne O$, 故存在一个非可裂的短正合序列

$$O \to S \to X \to \Omega_{m-1} \to O,$$

利用正合序列

$$O \to \Omega_m \to P_{m-1} \to \Omega_{m-1} \to O,$$

和投射模对满同态的"提升性", 有

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r] & \Omega_m \arrow[r] \arrow[d, "f"] & P_{m-1} \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \Omega_{m-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & O, \\ O \arrow[r] & S \arrow[r] & X \arrow[r] & \Omega_{m-1} \arrow[r] & O, \end{tikzcd}$$

由于底部的正合序列不可裂, 因此 $f \neq 0$, 故 S 是 $\mathrm{top}\,\Omega_m$ 的直和项 由于 $\mathrm{top}\,\Omega_m = \mathrm{top}\,P_m$, 因此知 S 是 $\mathrm{top}\,P_m$ 的直和项

另一方面, 假设 S 是 $\mathrm{top}\,P_m$ 的直和项, 则由于 $\mathrm{top}\,P_m = \mathrm{top}\,\Omega_m$ 有满同态 $f: \Omega_m \to S$, 作推出 (pushout), 我们有

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r] & \Omega_m \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "f"] & P_{m-1} \arrow[r, "f_{m-1}"] \arrow[d, "g"] & \Omega_{m-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & O, \\ O \arrow[r] & S \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[r] & \Omega_{m-1} \arrow[r] & O, \end{tikzcd}$$

我们断言底部正合列非可裂 否则, 存在同态 $\beta: X \to S$, 使得 $\beta\alpha = 1_S$ 进而有 $f = \beta\alpha f = (\beta g)\sigma$ 因为 S 是单模, 所以 $\sigma(\Omega_m) \not\subseteq \mathrm{rad}P_{m-1}$. 这与 f_{m-1} 是投射盖矛盾 因而 $O \neq \mathrm{Ext}_A^1(\Omega_{m-1}, S) \cong \mathrm{Ext}_A^m(M, S)$. 从而完成了 1) 的证明

对偶地, 可以证明 2).

定理 2 的证明　令 $\overline{A} = A/A\epsilon A$. 我们知道, $\overline{P}(j) = P(j)/P(j)\epsilon A = e_jA/e_jA\epsilon A$, $1 \leq j \leq i$, 是不可分解投射 $\overline{A}$-模的完全集, $(\overline{P}, \Lambda_i)$ 是拟遗传代数 令

$$O \to P_s \xrightarrow{f_s} \cdots \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \to \Delta(t) \to O$$

是 A-模范畴中 $\Delta(t)$ 的极小投射预解式, 则

$O \to \overline{P_s} \xrightarrow{f_s'} \cdots \xrightarrow{f_2'} \overline{P_1} \xrightarrow{f_1'} \overline{P_0} \to \overline{\Delta}(t) \to O$ 是 $\overline{A}$-模范畴中 $\overline{\Delta}(t)$ 的极小投射预解式, 其中 $\overline{P_j} = P_j/P_j\epsilon A$, $0 \leq j \leq s$, $\overline{\Delta}(t) = \Delta(t)/\Delta(t)\epsilon A$. 可能对某些 j, 有 $\overline{P_j} = 0$.

对 $t, \mu \in \Lambda$, 记 $\overline{\Delta}(t)$ 是一个标准 $\overline{A}$-模, $\overline{S}(u)$ 是一个单 $\overline{A}$-模 假设 $\mathrm{Ext}_{\overline{A}}^m(\overline{\Delta}(t), \overline{S}(u)) \neq 0$, 由命题 1 知 $\overline{S}(u)$ 是 $\mathrm{top}\,\overline{P_m}$ 的值和项, 由 $\overline{P_m} = P_m/P_m\epsilon A$ 知 $S(u)$ 是 $\mathrm{top}\,P_m$ 的直和项 又由命题 1, 可以得到 $\mathrm{Ext}_A^m(\Delta(t), S(u)) \neq 0$. (A, Λ) 有 Kazhdan-Lusztig 理论, 故 $m \equiv l'(t) + l'(u) \pmod 2$.

另一方面, $\overline{I}(j) = \mathrm{Hom}_k(Ae_j/A\epsilon Ae_j, k)$, $1 \leq j \leq i-1$, 是不可分解入射 $\overline{A}$-模的完全集 由定理 1, 对偶地我们可证明另一个蕴含关系 定理 2 证毕

参考文献:

[1] Lusztig G. Some problems in the representation theory of finite Chevalley groups[J]. Proc. Symposia in Pure Math., 1980, 37: 313- 317.

[2] Cline E, Parshall B, Scott L. Abstract Kazhdan-Lusztig theories[J]. Tohoku Math. J., 1993, 45: 511- 534.

[3] Cline E, Parshall B, Scott L. Infinitesimal Kazhdan-Lusztig theories[J]. Cont. Math., 1992, 139: 43 - 73.

[4] Scott L. Quasihereditary algebras and Kazhdan-Lusztig theory[A]. R. Bautista, R. Martinez-Villa, J A. dela Pena. Finite dimensional algebras and related topics, 7th International Conference[C]. Mexico: CMS Conference Proceeding, 1994, 18: 293- 308.

[5] Dlab V, Ringel C M. Quasi-hereditary algebras[J] Ill. J. Math., 1989, 33: 280- 291.

[6] Cline E, Parshall B, Scott L. Finite dimensional algebras and highest weight categories[J]. J. Reine Angew Math., 1988, 391: 85- 99.

On Kazhdan-Lusztig Theories of Quasi-Hereditary Algebras

WU Wu-shun[1], LIN Ya-nan[2]

(1. Dept. of Math., Zhangzhou Teracher College, Zhangzhou 363000, China;
2. Dept. of Math., Xiamen Univ., Xiamen 361005, China)

Abstract: By using method of homological algebras, the relation about Kazhdan-Lusztig theory between a quasi-hereditary algebra and its opposite algebra, its standard factor algebras has been considered. It was showed that if a quasi-hereditary algebra (A, Λ) has a Kzzhdan-Lusztig theory corresponding to the length function l, its opposite algebra (A, Λ) has also the Kazhdan-Lusztig theory corresponding to the length function l, and the standard factor algebra $(A/AeA, \Lambda_i)$ has the Kazhdan-Lusztig theory corresponding to the induced length function l'.

Key words: quasi-hereditary algebras; Kazhdan-Lusztig theories